

Бояджиев Д.
Гочева-Илиева С.
Макрелов И.
Попова Л.

**РЪКОВОДСТВО
ПО
ЧИСЛЕНИ МЕТОДИ
(I ЧАСТ)**

Пловдив
2003

Ръководството по числени методи (I част) е предназначено за студентите от Факултета по математика и информатика на Пловдивския Университет “Паисий Хилендарски”. То отговаря на учебните планове и може да се използва за подготовката на студентите от следните специалности за образователна степен “бакалавър”: “Приложна математика”, “Математика и информатика”, “Информатика”, както и от специалностите “Физика и математика”, “Инженерна физика” и др. от други факултети на ПУ. В него се съдържа кратко описание на теоретичните основи на методите, решени примери, както и задачи за самостоятелна работа.

Ръководството е подготвено от преподаватели от катедра “Приложна математика и моделиране” на ФМИ при ПУ. Отделните параграфи са написани както следва:

гл. ас. Дойчин Бояджиев: 3.1 - 3.5, 5.1 - 5.4.

доц. д-р Снежана Гочева-Илиева: 1.6, 5.5, 6.1, 6.2.

доц. д-р Илия Макрелов: 1.1 - 1.5, 2.1-2.4.

гл.ас. д-р Люба Попова: 4.1 - 4.4, изпитни тестове.

Рецензенти:

1. Доц. д-р Соня Табакова, ТУ-филиал Пловдив
2. Гл.ас. д-р Антон Илиев, ПУ “Паисий Хилендарски”

СЪДЪРЖАНИЕ

| | |
|---|-----------|
| Глава I. Числени методи на алгебрата | 5 |
| 1. Решаване на системи линейни уравнения – точни методи | 5 |
| 1.1. Метод на Гаус | 5 |
| 1.2. Метод на Гаус - Жордан | 9 |
| 1.3. Пресмятане на детерминанти | 11 |
| 1.4. Обръщане на матрици | 12 |
| 1.5. Метод на квадратния корен | 15 |
| 1.6. Метод на прогонването за тридиагонални системи линейни уравнения | 19 |
| 2. Решаване на системи линейни уравнения – приближени методи | 25 |
| 2.1. Метод на последователните приближения | 25 |
| 2.2. Метод на простата итерация (Якоби) | 30 |
| 2.3. Метод на Зайдел | 34 |
| 2.4. Още нещо за системите линейни уравнения | 38 |
| 3. Приближено решаване на нелинейни уравнения | 40 |
| 3.1. Метод на разполовяването | 41 |
| 3.2. Метод на хордите | 43 |
| 3.3. Метод на допирателните | 45 |
| 3.4. Комбиниран метод | 47 |
| 3.5. Метод на последователните приближения | 48 |
| 4. Собствени стойности и собствени вектори на матрици | 53 |
| 4.1. Метод на Ланцош. Метод на биортогонализация | 54 |
| 4.2. Метод на Якоби (метод на въртене) | 63 |
| 4.3. Решаване на частичния проблем за собствени стойности | 66 |
| 4.4. Собствени стойности на тридиагонални матрици | 67 |
| Глава II. Числени методи на математическия анализ | 73 |
| 5. Приближаване на функции | 73 |
| 5.1. Интерполация | 73 |
| 5.2. Метод на най-малките квадрати | 85 |
| 5.3. Средноквадратични приближения | 89 |
| 5.4. Равномерни приближения | 93 |
| 5.5. Интерполационни сплайни | 97 |
| 6. Числено диференциране и интегриране | 103 |
| 6.1. Числено диференциране | 103 |
| 6.2. Числено интегриране | 111 |
| Изпитни тестове | 116 |
| Литература | 120 |

Глава I. Числени методи на алгебрата

1. Решаване на системи линейни уравнения – точни методи

Постановка на задачата

Търси се решение на системата линейни уравнения от вида $Ax = b$, където

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Записът на (1) в разгънат вид изглежда така:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

1.1. Метод на Гаус

Един от най-известните методи за решаване на системи линейни алгебрични уравнения (СЛАУ) е **методът на Гаус**. Този метод притежава различни модификации и се използва обикновено в два режима – с избор на главен елемент и без избор на главен елемент. Напомняме ви, че изборът на главен (водещ) елемент означава, че при операцията деление ще избираме възможно **най-големия** делител (Защо?). При решаването на сериозни СЛАУ този режим на работа е препоръчителен. По-късно, чрез специален пример ще видите, че **неизползването** на главен елемент може да доведе до катастрофални резултати.

Алгоритъм

При метода на Гаус СЛАУ се трансформира последователно чрез точно определени елементарни преобразования в еквивалентни на нея системи [1, 2], като

крайна сметка се получава система с триъгълна матрица, чието решаване не представлява никаква трудност.

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \quad \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} & d_1 \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} & d_2 \\ & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} & d_n \end{array} \right)$$

Пример 1. Чрез метода на Гаус с избор на главен елемент по стълб решете системата:

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -x_2 & & +3x_4 = 9 \\ 4x_1 & -2x_2 & +5x_3 & = -10 \\ 3x_1 & +5x_2 & +2x_3 & -3x_4 = 0 \\ & -x_2 & +x_3 & -x_4 = -7 \end{array}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 3 & 9 \\ \boxed{4} & -2 & 5 & 0 & -10 \\ 3 & 5 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{R}_1 \leftrightarrow \text{R}_2 \\ \text{R}_2 \leftrightarrow \text{R}_1 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{4} & -2 & 5 & 0 & -10 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -7 \end{array} \right) \quad : (4) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\cdot (-2) \quad \cdot (-3)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 3 & 14 \\ 0 & \boxed{\frac{13}{2}} & -\frac{7}{4} & -3 & \frac{15}{2} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\text{swap} \\ \cdot (-1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 3 & 14 \\ 0 & \boxed{\frac{13}{2}} & -\frac{7}{4} & -3 & \frac{15}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \boxed{13/2} & -\frac{7}{4} & -3 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -3 & 14 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -7 \end{array} \right) : \left(\frac{13}{2} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{26} & -\frac{6}{13} & \frac{15}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -3 & 14 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{c} \downarrow \\ \leftrightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{26} & -\frac{6}{13} & \frac{15}{13} \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{5}{2}} & 3 & 14 \\ 0 & 0 & \frac{19}{26} & -\frac{19}{13} & -\frac{76}{13} \end{array} \right) : (-\frac{5}{2}) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{26} & -\frac{6}{13} & \frac{15}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} & -\frac{28}{5} \\ 0 & 0 & \frac{19}{26} & -\frac{19}{13} & -\frac{76}{13} \end{array} \right) \cdot (-\frac{19}{26}) \leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{26} & -\frac{6}{13} & \frac{15}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} & -\frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{38}{65}} & -\frac{114}{65} \end{array} \right) : \left(-\frac{38}{65} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{26} & -\frac{6}{13} & \frac{15}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} & -\frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Получената “триъгълна” система е еквивалентна на дадената. Решаването ѝ става “отдолу-нагоре”:

От последното уравнение намираме x_4 :

$$\rightarrow \boxed{x_4 = 3}.$$

От предпоследното уравнение намираме x_3 :

$$x_3 - \frac{6}{5}x_4 = -\frac{28}{5} \rightarrow x_3 - \frac{6}{5} \cdot 3 = -\frac{28}{5} \rightarrow \boxed{x_3 = -2}.$$

От второто уравнение намираме x_2 :

$$x_2 - \frac{7}{26}x_3 - \frac{6}{13}x_4 = \frac{15}{13} \rightarrow x_2 - \frac{7}{26} \cdot (-2) - \frac{6}{13} \cdot 3 = \frac{15}{13} \rightarrow \boxed{x_2 = 2}.$$

И накрая от първото уравнение намираме x_1 :

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{4}x_3 + 0 \cdot x_4 = -\frac{5}{2} \rightarrow x_1 - \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{5}{4} \cdot (-2) + 0 \cdot 3 = -\frac{5}{2} \rightarrow \boxed{x_1 = 1}.$$

Отговор: $x = (1; 2; -2; 3)$.

В този пример главните елементи са: $4, \frac{13}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{38}{65}$.

Задачи за упражнения

1) Решете самостоятелно системите чрез метода на Гаус с избор на главен елемент и без избор на главен елемент. Работете с обикновени дроби:

$$\text{а) } \left\{ \begin{array}{l} 10x_1 - 7x_2 = 7 \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \end{array} \right.$$

Отговор: (0, -1, 1)

$$\text{б) } \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = -12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15 \end{array} \right.$$

Отговор: (1, 0, 2)

$$\text{в) } \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -6 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 12 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -4 \end{array} \right.$$

Отговор: (2, 1, 3, -1)

Коментар: Ако сте работили добросъвестно ще забележите, че и при двата случая (с избор или без избор на главен елемент) ще получите **едни и същи точни** резултати.

Изборът на главен елемент има смисъл когато се работи с десетични дроби и с определен брой десетични знаци, т.е. така, както работи всяко изчислително устройство.

2) Решете системата чрез метода на Гаус като използвате изчислително устройство

$$\begin{cases} 2,4759x_1 + 1,6235x_2 + 4,6231x_3 = 0,0647 \\ 1,4725x_1 + 0,9589x_2 - 1,3253x_3 = 1,0475 \\ 2,6951x_1 + 2,8965x_2 - 1,4794x_3 = -0,6789 \end{cases}$$

а) без избор на главен елемент,

б) с избор на главен елемент.

И в двата случая извършете пресмятанията с четири десетични знака след десетичната запетая.

Отговор:

Ако работите без избор на главен елемент ще получите:

$$x_3 = -0,2443, \quad x_2 = -2,0532, \quad x_1 = 1,8286.$$

Ако работите с избор на главен елемент ще получите:

$$x_3 = -0,2442, \quad x_2 = -2,0716, \quad x_1 = 1,8405.$$

Защо се получават различия в отговорите? Кой от отговорите е по-добър?

3) Дадена е системата:

$$\begin{cases} 0,05x_1 + 0,07x_2 + 0,06x_3 + 0,05x_4 = 0,23 \\ 0,07x_1 + 0,10x_2 + 0,08x_3 + 0,07x_4 = 0,32 \\ 0,06x_1 + 0,08x_2 + 0,10x_3 + 0,09x_4 = 0,33 \\ 0,05x_1 + 0,07x_2 + 0,09x_3 + 0,10x_4 = 0,31 \end{cases}$$

Точното решение на тази система е (1, 1, 1, 1).

Решете системата чрез метода на Гаус:

а) без избор на главен елемент,

б) с избор на главен елемент по стълб, по ред или по цялата матрица.

Запазвайте по четири десетични знака в пресмятанията. Как може да обясните вашите резултати?

1.2. Метод на Гаус-Жордан

Алгоритъм

Методът на Гаус-Жордан преобразува изходната разширена матрица към единична матрица и дясна част, равна на търсеното решение:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_2 \\ & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_n \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \dots \\ x_n = c_n \end{cases}$$

Пример 1. По метода на Гаус-Жордан с избор на главен елемент по стълб решете системата:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = -7 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 3 & 9 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & -10 \\ 3 & 5 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{св.} \\ \text{св.}}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & 5 & 0 & -10 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{:(4)} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\cdot (-2) \cdot (-3) \\ \cdot (-2) \cdot (-3)}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 3 & 14 \\ 0 & \frac{13}{2} & -\frac{7}{4} & -3 & \frac{15}{2} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{св.} \\ \text{св.}}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{13}{2} & -\frac{7}{4} & -3 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -3 & 14 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{:(\frac{13}{2})} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{26} & -\frac{6}{13} & \frac{15}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -3 & 14 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\cdot (\frac{1}{2}) \cdot (1) \\ \cdot (\frac{1}{2}) \cdot (1)}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{29}{26} & -\frac{3}{13} & -\frac{25}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{26} & -\frac{6}{13} & \frac{15}{13} \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{5}{2}} & 3 & 14 \\ 0 & 0 & \frac{19}{26} & -\frac{19}{13} & -\frac{76}{13} \end{array} \right) \quad :(-\frac{5}{2}) \quad \leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{29}{26} & -\frac{3}{13} & -\frac{25}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{26} & -\frac{6}{13} & \frac{15}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} & -\frac{28}{5} \\ 0 & 0 & \frac{19}{26} & -\frac{19}{13} & -\frac{76}{13} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \cdot(\frac{7}{26}) \cdot(-\frac{29}{26}) \cdot(-\frac{19}{26}) \\ \leftarrow \end{array} \quad \leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{72}{65} & \frac{281}{65} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{65} & -\frac{23}{65} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} & -\frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{38}{65}} & -\frac{114}{65} \end{array} \right) \quad :(-\frac{38}{65}) \quad \leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{72}{65} & \frac{281}{65} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{65} & -\frac{23}{65} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} & -\frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \cdot(\frac{6}{5}) \cdot(\frac{51}{65}) \cdot(-\frac{72}{65}) \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -2 \\ x_4 = 3 \end{array}}$$

Задачи за упражнения

Решете системите чрез метода на Гаус-Жордан с избор или без избор на главен елемент. Работете с обикновени дробни:

$$\text{а) } \left\{ \begin{array}{l} 10x_1 - 7x_2 = 7 \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \end{array} \right.$$

Отговор: (0, -1, 1)

$$\text{б) } \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = -12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15 \end{array} \right.$$

Отговор: (1, 0, 2)

$$\text{в) } \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = -4 \end{array} \right.$$

Отговор: (-2, 0, 1)

$$\text{г) } \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -6 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 12 \\ \quad \quad x_2 - x_3 + 2x_4 = -4 \end{array} \right.$$

Отговор: (2, 1, 3, -1)

$$\text{д) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 18 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

Отговор: (2, -3, 4, -5)

1.3. Пресмятане на детерминанти

За пресмятане на детерминантата на дадена матрица е необходимо само да се съхранят главните елементи и да се умножат. Следователно чрез метода на Гаус-Жордан можем да намираме и детерминантата на дадена матрица с точност до знак.

$$\text{За пример 1 } \det A = 4 \cdot \frac{13}{2} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{38}{65}\right) = 38.$$

Пример за коефициентна неустойчивост на решението

Ако не се прилага избор на главен елемент в метода на Гаус може да се стигне до загуба на точност [4]. В следващия пример приемаме, че работим с хипотетична машина, която реализира аритметика с плаваща запетая при основа 10 и с пет значещи цифри. При тези условия да решим долната система по метода на Гаус без избор на главен елемент. Точно решение е (0, -1, 1).

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7 \\ -3x_1 + 2,099x_2 + 6x_3 = 3,901 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2,099 & 6 & 3,901 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array} \right) : (10) \quad \leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,7 & 0 & 0,7 \\ -3 & 2,099 & 6 & 3,901 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} (3) \cdot (-5) \\ \swarrow \\ \searrow \end{array} \quad \leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,7 & 0 & 0,7 \\ 0 & -10^{-3} & 6 & 6,001 \\ 0 & 2,5 & 5 & 2,5 \end{array} \right) : (-10^{-3}) \quad \leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,7 & 0 & 0,7 \\ 0 & 1 & -6 \cdot 10^3 & -6,001 \cdot 10^3 \\ 0 & 2,5 & 5 & 2,5 \end{array} \right) \cdot (-2,5) \quad \leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,7 & 0 & 0,7 \\ 0 & 1 & -6 \cdot 10^3 & -6,001 \cdot 10^3 \\ 0 & 0 & 1,5005 \cdot 10^4 & 1,5004 \cdot 10^4 \end{array} \right)$$

Във **втория** ред на **предпоследната** матрица имаме $-6,001 \cdot 10^3 \cdot (-2,5) = 1,50025 \cdot 10^4$. Тук вече имаме повече от пет значещи цифри и трябва да закръглим. Има две възможности:

1) Или да се отреже последната цифра и да получим $1,5002 \cdot 10^4$.

2) Или да се закръгли нагоре, т.е. да вземем $1,5003 \cdot 10^4$.

След това към резултата се добавя 2,5.

Да допуснем, че използваме случая 1). Тогава ще имаме: $1,5002 \cdot 10^4 + 2,5 = 1,50045 \cdot 10^4$ и отново ще се отреже младшия разряд и в края на краищата ще имаме $1,5004 \cdot 10^4$.

Последното уравнение ще има вида:

$$1,5005 \cdot 10^4 x_3 = 1,5004 \cdot 10^4,$$

откъдето $x_3 = 0,99993$. На пръв поглед това е добре. За нещастие x_2 трябва да се определи от уравнението

$$x_2 - 6 \cdot 10^3 x_3 = -6,001 \cdot 10^3,$$

$$\text{т.е. } x_2 = -6,001 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^3 \cdot 0,99993 = -1,5.$$

Накрая от първото уравнение пресмятаме $x_1 = -0,35$.

Виждале, че полученият резултат е далеч от истината.

1.4. Обръщане на матрици

Постановка на задачата

Дадена е квадратна матрица A от n -ти ред:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Търси се обратната матрица A^{-1} , т.е. такава матрица, че $AA^{-1} = E$. Означаваме

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Намирането на обратната матрица по стълбове се свежда до решаване на n системи линейни алгебрични уравнения с една и съща матрица A и различни десни части, равни на стълбовете на единичната матрица E . Тези задачи са:

$$A \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \dots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Удобно е да се използва методът на Гаус-Жордан, който преобразува разширената матрица към единична, а в дясната част се получават решенията.

Алгоритъм

$$\left(A \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(E \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ & & \dots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{array} \right. \right)$$

Пример. Обърнете матрицата A и намерете детерминантата ѝ чрез метода на Гаус-Жордан с избор на главен елемент по стълб:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} & \left(\boxed{3} \begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) : (3) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-1) \quad \cdot (-2) \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} \quad \Leftrightarrow \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-7/3} & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \end{array} \right) : (-\frac{7}{3}) \quad \Leftrightarrow \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & \frac{2}{7} & 0 & -\frac{3}{7} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \swarrow \quad \searrow \\ \cdot (\frac{5}{3}) \quad \cdot (-\frac{5}{3}) \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{18}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & \frac{2}{7} & 0 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & \boxed{24/7} & \frac{1}{7} & 1 & -\frac{5}{7} \end{array} \right) : (\frac{24}{7}) \quad \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{18}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & \frac{2}{7} & 0 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} & -\frac{5}{24} \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \cdot (\frac{8}{7}) \quad \cdot (-\frac{18}{7}) \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} & -\frac{5}{24} \end{array} \right) \rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{24} & \frac{7}{24} & -\frac{5}{24} \end{pmatrix}.$$

Видно е, че главните елементи са 3 , $-\frac{7}{3}$ и $\frac{24}{7}$. Имаме също и смяна на два реда (явява се множител (-1) пред произведението на главните елементи). Следователно $\det A = -3 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \left(\frac{24}{7}\right) = 24$.

Задачи за упражнения

Обърнете дадените по-долу матрици и заедно с това изчислете детерминантите им чрез метода на Гаус-Жордан:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\text{Отговор: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2) B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{Отговор: } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3) C = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 \\ -i & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{Отговор: } C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ \frac{1}{4}i & -\frac{1}{4} & i \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}i & 0 \end{pmatrix}$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 14 & -5 & 12 \\ 9 & -2 & 7 \\ 17 & -5 & 14 \end{pmatrix},$$

$$\text{Отговор: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & -11 \\ -7 & -8 & 10 \\ -11 & -15 & 17 \end{pmatrix}$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Отговор: } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ -\frac{1}{7} & -2 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & -7 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Отговор: } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{22} & \frac{7}{22} & \frac{3}{22} \\ \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{5}{22} & -\frac{13}{22} & \frac{7}{22} \end{pmatrix}$$

$$7) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Отговор: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,11 & -0,42 & 0,35 & -0,23 \\ -0,06 & 0,32 & -0,10 & 0,58 \\ 0,13 & 0,14 & 0,05 & -0,09 \\ 0,14 & -0,08 & -0,10 & -0,02 \end{pmatrix}$$

1.5. Метод на квадратния корен

Постановка на задачата

Нека да разгледаме системата линейни алгебрични уравнения (СЛАУ)

$$(1) \quad Ax = b,$$

където A е симетрична матрица $(a_{ij} = a_{ji}), i, j = \overline{1, n}$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ - търсеното решение.

От алгебрата е известно, че симетричната матрица A може да се разложи на две триъгълни матрици:

$$(2) \quad A = TT^T, \quad T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & & \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

T^T - транспонирана на T .

От (1) и (2) можем да запишем

$$(3) \quad TT^T x = b.$$

Ако положим $T^T x = y$, то от (3) ще получим системата $Ty = b$.

Алгоритъм

1. Построяване на разлагането $A = TT^T$

| | |
|--|---|
| $t_{11} = \sqrt{a_{11}},$ $t_{i1} = \frac{a_{1i}}{t_{11}}, \quad i = 2, 3, \dots, n$ | $t_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} t_{kj}^2}, \quad t_{ik} = (a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} t_{kj} t_{ij}) / t_{kk}$ $k = 2, 3, \dots, n; \quad i = k+1, \dots, n$ |
|--|---|

2. Решаване на “триъгълната” система $Ty = b$ и намиране на вектора

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T,$$

| |
|--|
| $y_1 = \frac{b_1}{t_{11}}, \quad y_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} t_{ij} y_j) / t_{ii}, \quad i = 2, 3, \dots, n$ |
|--|

3. Решаване на “триъгълната” система $T^T x = y$ и намиране на търсеното решение

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

| |
|--|
| $x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}, \quad x_i = (y_i - \sum_{j=i+1}^n t_{ji} x_j) / t_{ii}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$ |
|--|

4. $\det A = \det T \cdot \det T^T = t_{11}^2 \cdot t_{22}^2 \dots t_{nn}^2$.

Ако не искаме да работим с комплексни числа елементите

$$(4) \quad a_{11} \quad \text{и} \quad a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} t_{kj}^2, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

трябва да бъдат положителни. Условието матрицата A да е симетрична не дава гаранция за това. Трябва още нещо.

Ако матрицата A е **положително определена**, т.е. $(Ax, x) \geq 0$ за $\forall x$ и $(Ax, x) = 0$ само за $x = 0$, тогава стойностите на израза (4) ще бъдат строго положителни.

Това означава, че методът на квадратния корен е особено удобен за решаване на системи линейни алгебрични уравнения със симетрична матрица, която е положително определена.

Коментар. Работата с комплексни числа не е пречка за осъществяването на алгоритъма.

Пример. Чрез метода на квадратния корен да се реши системата:

$$\begin{cases} 9x_1 & + 3x_2 & & = 12 \\ 3x_1 & + 10x_2 & + 6x_3 & = -8 \\ & 6x_2 & + 13x_3 & = 1 \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Построяваме матрицата $T(T^T)$:

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{9} = 3, \quad t_{21} = a_{12} / t_{11} = 3/3 = 1, \quad t_{31} = a_{13} / t_{11} = 0/3 = 0,$$

$$t_{22} = \sqrt{a_{22} - t_{21}^2} = \sqrt{10 - 1} = 3, \quad t_{32} = (a_{32} - t_{21}t_{31}) / t_{22} = (6 - 1 \cdot 0) / 3 = 2,$$

$$t_{33} = \sqrt{a_{33} - t_{31}^2 - t_{32}^2} = \sqrt{13 - 0^2 - 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Следователно:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad T^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Решаваме системата $Ty = b$, която в разгънат вид изглежда така

$$\begin{cases} t_{11}y_1 & & & = b_1 \\ t_{21}y_1 & + t_{22}y_2 & & = b_2 \\ t_{31}y_1 & + t_{32}y_2 & + t_{33}y_3 & = b_3 \end{cases}$$

$$y_1 = b_1 / t_{11} = 12 / 3 = 4, \quad y_2 = (b_2 - t_{21}y_1) / t_{22} = (-8 - 1 \cdot 4) / 3 = -12 / 3 = -4,$$

$$y_3 = (b_3 - t_{31}y_1 - t_{32}y_2) / t_{33} = (1 - 0 \cdot 4 - 2 \cdot (-4)) / 3 = 3.$$

$$\text{Следователно } y = (y_1, y_2, y_3)^T = (4, -4, 3)^T.$$

3. Решаваме системата $T^T x = y$, която в разгънат вид е:

$$\begin{cases} t_{11}x_1 & + t_{21}x_2 & + t_{31}x_3 & = y_1 \\ & t_{22}x_2 & + t_{32}x_3 & = y_2, \\ & & + t_{33}x_3 & = y_3 \end{cases}$$

$$x_3 = y_3 / t_{33} = 3 / 3 = 1, \quad x_2 = (y_2 - t_{32}x_3) / t_{22} = (-4 - 2 \cdot 1) / 3 = -2,$$

$$x_1 = (y_1 - t_{21}x_2 - t_{31}x_3) / t_{11} = (4 - 1(-2) - 0 \cdot 1) / 3 = 2.$$

$$\text{Следователно } x = (x_1, x_2, x_3)^T = (2, -2, 1)^T.$$

$$\boxed{4.} \quad \det A = t_{11}^2 \cdot t_{22}^2 \cdot t_{33}^2 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 729.$$

Задачи за упражнения

1) Възможно ли е за системата да се приложи методът на квадратния корен?

$$\begin{cases} 1,2x_1 - 1,5x_2 + 7,2x_3 = 16,8 \\ 2,2x_1 + 5,5x_2 - 1,5x_3 = 10,55 \\ 6,1x_1 + 2,2x_2 + 1,2x_3 = 16,55 \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 1,2 & -1,5 & 7,2 \\ 2,2 & 5,5 & -1,5 \\ 6,1 & 2,2 & 1,2 \end{pmatrix}$$

Упътване: Разместете някои от редовете на системата.

2) По метода на квадратния корен да се разложи матрицата S като произведение на две триъгълни матрици и да се изчисли детерминантата ѝ.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{pmatrix}. \quad \text{Отговор: } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Чрез метода на квадратния корен решете системата и намерете детерминантата на съответната матрица

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 11x_4 + 14x_5 = 10 \\ 3x_1 + 8x_2 + 14x_3 + 20x_4 + 26x_5 = 18 \\ 4x_1 + 11x_2 + 20x_3 + 30x_4 + 40x_5 = 28 \\ 5x_1 + 14x_2 + 26x_3 + 40x_4 + 55x_5 = 39 \end{cases}.$$

Препоръка: За решаването на този пример използвайте компютър.

$$\text{Отговор: } y = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) По метода на квадратния корен да се реши системата

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 5 \end{cases}$$

Отговор: $(-1, 0, 1)$.

5) Дадена е матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Като се използва методът на квадратния корен да се пресметне детерминантата на матрицата $B = A.A^T$.

Отговор: $\det B = 16$.

1.6. Метод на прогонването за тридиагонални системи линейни уравнения

Постановка на задачата

Търси се решението на системата линейни алгебрични уравнения

$$(1) \quad Ax = d,$$

където A е тридиагонална матрица, x – вектор на неизвестните, d - дясна част:

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & & & \\ 0 & \dots & a_k & b_k & c_k & \dots & 0 \\ & \dots & & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & & & a_n & b_n & \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \neq 0.$$

В разгънат вид системата е:

$$(3) \quad \begin{array}{rcll} b_1x_1 & + c_1x_2 & & = d_1 \\ a_2x_1 & + b_2x_2 & + c_2x_3 & = d_2 \\ & a_3x_2 & + b_3x_3 & + c_3x_4 = d_3 \\ & & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ & & a_kx_{k-1} & + b_kx_k + c_kx_{k+1} = d_k \\ & & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ & & a_{n-1}x_{n-2} & + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = d_{n-1} \\ & & & a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n \end{array}$$

Тази система може да се реши по който и да е от съществуващите методи за системи линейни алгебрични уравнения: метод на Гаус, метод на Гаус-Жордан, проста итерация и др. Но тъй като тя е от специален вид, за нейното решаване се прилагат специални ефективни методи, между които е методът на прогонването. Методът спада към групата на точните методи, т.е. теоретично, при работа с точни числа (без закръгляне), след краен брой аритметични операции се получава точното решение. В случая на реални системи обаче, като правило броят на уравненията n е много голям и неминуемо се работи със закръгляне на междинните резултати до определен знак след десетичната запетая. Това може да доведе до натрупване на грешка, независимо, че методът е точен. В този смисъл е важна следната теорема:

Достатъчно условие за устойчивост на метода на прогонването

Нека

$$(4) \quad |b_k| \geq |a_k| + |c_k|, \quad k = \overline{1, n}.$$

Тогава съществува единствено решение на системата (1), което е и устойчиво, т.е. малки грешки в началните данни водят до малки грешки в резултата.

Забележка 1. Условието (4) може да се прецизира. Не е трудно да се съобрази, че всъщност то означава преобладаващ главен диагонал на матрицата A .

Забележка 2. Възможни са и случаи, когато методът на прогонването работи и без да е изпълнено условието за устойчивост, т.к. то е само достатъчно, но не и необходимо.

Изчислителна схема на метода на прогонването

За удобство се въвеждат две помощни нулеви неизвестни $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$, с чиято помощ при произволни коефициенти a_1 и c_n се допълват първото и последното уравнение на системата (3) така, че всички редове да имат един и същ вид.

Полагаме:

$$(5) \quad x_k = \alpha_k x_{k+1} + \beta_k, \quad k = \overline{1, n-1},$$

където α_i, β_i са прогонъчните коефициенти. Те се пресмятат последователно по следните рекурентни формули:

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0, \\ \alpha_k = -\frac{c_k}{b_k + a_k \alpha_{k-1}}, \quad \beta_k = \frac{d_k - a_k \beta_{k-1}}{b_k + a_k \alpha_{k-1}}, \quad k = \overline{1, n} \end{cases}$$

След определянето им, като приложим (5) в обратен ред, намираме търсените решения на системата:

$$(7) \quad \begin{cases} x_n = \beta_n, \\ x_k = \alpha_k x_{k+1} + \beta_k, \quad k = n-1, n-2, \dots, 1. \end{cases}$$

Пример. По метода на прогонването да се реши системата

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 8 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & = 3,2 \\ 2x_2 - 4x_3 & = -0,5 \\ -2x_3 + 4x_4 & = 2 \end{cases}.$$

Решение:

Провежда се на три етапа:

1. Проверка на условието за устойчивост (4),
2. Изчисляване на прогонъчните коефициенти по формули (6),
3. Изчисляване на неизвестните в обратен ред по формули (7).

Започваме с **етап 1.** Имаме $n = 4$. Съставяме таблицата на коефициентите:

| | | | | | |
|-----|-----|-------|-------|-------|-------|
| | k | a_k | b_k | c_k | d_k |
| | 1 | 0 | 2 | 1 | 8 |
| (8) | 2 | -1 | 2 | -1 | 3,2 |
| | 3 | 2 | -4 | 0 | -0,5 |
| | 4 | -2 | 4 | 0 | 2 |

Лесно се проверяват условията (4) съответно за $k = 1, 2, 3, 4$: $|b_1| \geq |a_1| + |c_1|$, тъй като $|2| \geq |0| + |1|$; $|b_2| \geq |a_2| + |c_2|$ от $|2| \geq |-1| + |-1|$; $|b_3| \geq |a_3| + |c_3|$ от $|-4| \geq |2| + |0|$ и $|b_4| \geq |a_4| + |c_4|$, защото $|4| \geq |-2| + |0|$. Следователно условието за устойчивост е изпълнено.

Етап 2. Пресмятаме прогонъчните коефициенти по формули (6), като забелязваме, че знаменателите $z_k = b_k + a_k \alpha_{k-1}$ за фиксирано k са еднакви:

$$\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0,$$

$$z_1 = b_1 + a_1 \alpha_0 = 2 + (-1) \cdot 0 = 2,$$

$$\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1 + a_1 \alpha_0} = -\frac{1}{z_1} = -\frac{1}{2} = -0,5, \quad \beta_1 = \frac{d_1 - a_1 \beta_0}{z_1} = \frac{8 - 0 \cdot 0}{2} = 4;$$

$$z_2 = b_2 + a_2 \alpha_1 = 2 + (-1) \cdot (-0,5) = 2,5,$$

$$\alpha_2 = -\frac{c_2}{b_2 + a_2 \alpha_1} = -\frac{-1}{z_2} = -\frac{1}{2,5} = 0,4, \quad \beta_2 = \frac{d_2 - a_2 \beta_1}{b_2 + a_2 \alpha_1} = \frac{3,2 - (-1) \cdot 4}{2,5} = \frac{7,2}{2,5} = 2,88;$$

$$z_3 = b_3 + a_3 \alpha_2 = -4 + 2 \cdot (0,4) = -3,2,$$

$$\alpha_3 = -\frac{c_3}{b_3 + a_3 \alpha_2} = -\frac{0}{z_3} = 0, \quad \beta_3 = \frac{d_3 - a_3 \beta_2}{b_3 + a_3 \alpha_2} = \frac{-0,5 - 2 \cdot (2,88)}{-3,2} = \frac{-6,26}{-3,2} = 1,95625;$$

$$z_4 = b_4 + a_4 \alpha_3 = 4 + (-2) \cdot 0 = 4,$$

$$\alpha_4 = -\frac{c_4}{b_4 + a_4 \alpha_3} = -\frac{0}{z_4} = 0, \quad \beta_4 = \frac{d_4 - a_4 \beta_3}{b_4 + a_4 \alpha_3} = \frac{2 - (-2) \cdot (1,95625)}{4} = \frac{5,9125}{4} = 1,478125.$$

Удобно е всички резултати да се нанасят в таблица, както е показано по-долу.

Таблица 1

| k | a_k | b_k | c_k | d_k | z_k | α_k | β_k |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|------------|-----------|
| 1 | 0 | 2 | 1 | 8 | 2 | -0,5 | 4 |
| 2 | -1 | 2 | -1 | 3,2 | 2,5 | 0,4 | 2,88 |
| 3 | 2 | -4 | 0 | -0,5 | -3,2 | 0 | 1,95625 |
| 4 | -2 | 4 | 0 | 2 | 4 | 0 | 1,478125 |

Етап 3. Изчисляваме неизвестните по формули (7):

$$x_4 = \beta_4 = 1,478125;$$

$$x_3 = \alpha_3 x_4 + \beta_3 = 0 \cdot (1,478125) + 1,95625 = 1,95625;$$

$$x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2 = (0,4) \cdot (1,95625) + 2,88 = 3,6625;$$

$$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1 = (-0,5) \cdot (3,6625) + 4 = 2,16875.$$

Отговор: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,16875 \\ 3,6625 \\ 1,95625 \\ 1,478125 \end{pmatrix}.$

Задачи за упражнения

1) По метода на прогонването решете системите:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ -x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 4x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_3 + 5x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_2 - 5x_3 + x_4 = 6 \\ -x_3 + 2x_4 - x_5 = 5 \\ -2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 1,2x_1 - 2x_2 = 3,1 \\ -4x_1 + 6,5x_2 - x_3 = -3,5 \\ -2x_2 - 5,2x_3 + 1,2x_4 = 7,2 \\ -x_3 + 2x_4 - 0,5x_5 = 4,8 \\ -2x_4 + 3x_5 = -0,2 \end{cases}$$

Отговори: а) $x = (1; 2; 3; 4)$; б) $x = (0,162679; 0,349282; 0,440191; 0,889952)$;

в) $x = (-1,25; 2,5; -1,75; 0,75)$; г) $(1; 1; -1; 3; 2)$; д) $(38,2819; 21,4191;$

$-10,4032; -3,38191; -2,32128)$

- 2) Направете програма за пресмятане решението на система по метода на прогонването за произволен брой уравнения и с нейна помощ решете отново горните системи.
- 3) Изведете формулите на метода на прогонването за решаване на петдиагонални линейни системи уравнения.

Упътване: По аналогия с (5) направете полагането $x_k = \alpha_k x_{k+1} + \beta_k x_{k+2} + \gamma_k$.